Transformasi-z

3.2 Invers Transformasi-z

Formasi inversi untuk memperoleh dari x(n) dari X(z) dapat diperoleh menggunakan teorema integral Cauchy yang merupakan teorema penting dalam variabel kompleks.

Transformasi-z didefinisikan oleh

$$X(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan z^{n-1} dan mengintegralkan kedua sisi melalui kontur tertutup dalam ROC (*Region Of Convergence*) dari X(z) yang mencakup titik awalnya. Kontur tersebut diilustrasikan pada gambar di bawah ini.

$$\oint_C X(z) z^{n-1}\, dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{n-1-k}\, dz$$

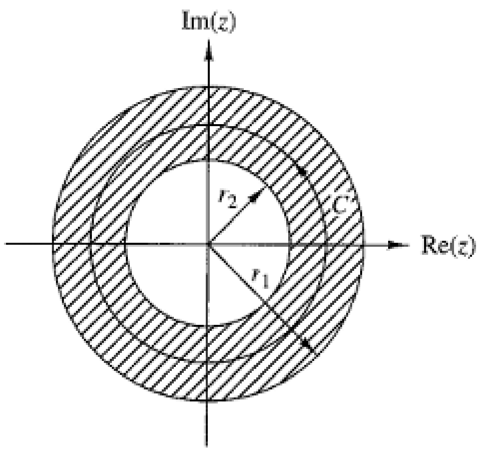

Figure 3.1.5
Contour C for integral in (3.1.13).

Karena deret tersebut konvergen pada garis luarnya, kita dapat menukar orde integrasi dan penjumlahan pada ruas kanan.

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_C z^{n-1-k} dz$$

Dengan memakai integral Cauchy, yang menyatakan bahwa

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1-k}\, dz = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Dengan memakai kedua rumus di atas, maka rumus inversi yang diinginkan adalah

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz}$$

3.3 Sifat-Sifat Transformasi-Z

1. Linearitas,

   Jika

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

   Dan

$$x_2(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

Maka

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z) = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$$

Contoh 1

Tentukan transformasi-z dan ROC dari sinyal

$X(n) = [3(2^n) – 4(3^n)]\ u(n)$

Jawab:

$X_1(n) = 2^n\ u(n)$

$X_2(n) = 3^n\ u(n)$

Maka $\mathbf{x(n) = 3x_1(n) – 4x_2(n)}$ dan $\mathbf{X(z) = 3X_1(z) – 4X_2(z)}$. Ingat bahwa

$$\alpha^n u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > |\alpha|$$

Dengan memasukkan $\alpha = 2$ dan $\alpha = 3$, diperoleh

$$x_1(n) = 2^n u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 2$$

$$x_2(n) = 3^n u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_2(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 3$$

Irisan ROC dari $X_1(z)$ dan $X_2(z)$ adalah $|z| > 3$. Jadi transformasi X(z) keseluruhan adalah

$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} - \frac{4}{1-3z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 3$$

Contoh 2.

Tentukan transformasi-z sinyal

(a) $X(n) = (\cos \omega_0 n)\ u(n)$

(b) $X(n) = (\sin \omega_0 n)\ u(n)$

Jawab:

(a) Dengan menggunakan rumus Euler, sinyal x(n) dapat dinyatakan sebagai

$$x(n) = (\cos \omega_0 n) u(n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} u(n) + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n} u(n)$$

Jadi X(z) dapat dinyatakan dengan

$$X(z) = \frac{1}{2} Z\{e^{j\omega_0 n} u(n)\} + \frac{1}{2} Z\{e^{-j\omega_0 n} u(n)\}$$

Dengan memisalkan $\alpha = e^{\pm j\omega 0}$ ($|\alpha| = |e^{\pm j\omega 0}| = 1$) diperoleh

$$e^{j\omega_0 n} u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{j\omega_0} z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

and

$$e^{-j\omega_0 n} u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega_0} z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Jadi

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Sesudah beberapa manipulasi aljabar sederhana diperoleh hasil

$$(\cos\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

(b) Dari Identitas Euler

$$x(n) = (\sin\omega 0n)u(n) = \frac{1}{2j}[e^{j\omega_0 n}u(n) - e^{-j\omega_0 n}u(n)]$$

Jadi

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right), \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Akhirnya

$$(\sin\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

2. Pergeseran waktu,

   Jika $\quad x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$

   Maka $\quad x(n-k) \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-k}X(z)$

   Contoh 3.

   Dengan memakai pergeseran waktu, tentukan transformasi-z sinyal $x_2(n)$ dan $x_3(n)$ dalam contoh $X_2(n) = \{1,2,5,7,0,1\}$ dan $X_3(n) = \{0,0,1,2,5,7,0,1\}$

   Jawab:

   $$X_2(n) = x_1(n + 2)$$

   Dan

   $$X_3(n) = x_1(n - 2)$$

   Maka diperoleh

   $$X_2(z) = z^2 X_1(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$$

   $$X_3(z) = z^{-2}X_1(z) = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

   Contoh 4.

   Tentukan transformasi sinyal

   $$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   Jawab:

   Transformasi-z sinyal adalah

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 \cdot z^{-n} = 1 + z^{-1} + \cdots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N, & \text{if } z = 1 \\ \dfrac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}, & \text{if } z \neq 1 \end{cases}$$

Dengan menggunakan sifat liniearitas dan pergeseran waktu. Perhatikan bahwa x(n) dapat dinnyatakan dari segi dua sinyal step unit.

$$x(n) = u(n) - u(n - N)$$

Sehingga X(z) dapat ditentukan dengan

$$X(z) = Z\{u(n)\} - Z\{u(n - N)\} = (1 - z^{-N})Z\{u(n)\}$$

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

3. Scaling dalam Domain-z

Jika $x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$ ROC: $r_1 < |z| < r_2$

Maka

$$a^n x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z), \qquad \text{ROC: } |a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

Untuk setiap konstanta a, real atau kompleks.

Bukti:

$$Z\{a^n x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(a^{-1}z)^{-n}$$

$$= X(a^{-1}z)$$

Since the ROC of $X(z)$ is $r_1 < |z| < r_2$, the ROC of $X(a^{-1}z)$ is

$$r_1 < |a^{-1}z| < r_2$$

or

$$|a|r_1 < |z| < |a|r_2$$

Untuk pemahaman yang lebih baik tentang arti dan maksud sifat scaling, kita menyatakan a dan z dalam bentuk polar sebagai a = $r_0e^{j\omega 0}$, z = $re^{j\omega 0}$ dan memperkenalkan variabel kompleks yang baru $\omega = a^{-1}z$. Jadi Z{x(n)} = X(z) dan Z{ax(n)} = X(ω). Hal itu dapat dilihat dengan mudah bahwa

$$w = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0}r\right) e^{j(\omega - \omega_0)}$$

Contoh:

Tentukan transformasi-z dari sinyal

(a) $X(n) = a^n (\cos \omega_0 n)\, u(n)$

(b) $X(n) = a^n (\sin \omega_0 n)\, u(n)$

Jawab:

(a) $a^n(\cos \omega_0 u(n) \leftrightarrow \frac{1-az^{-1}\cos \omega_0}{1-2az^{-1}cos\omega_0+z^{-2}\, a^2}\quad |z| > |a|$

(b) $a^n(\sin \omega_0 u(n) \leftrightarrow \frac{az^{-1}\sin \omega_0}{1-2az^{-1}cos\omega_0+z^{-2}\, a^2}\quad |z| > |a|$

4. Pembalikan waktu

Jika

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z), \qquad \text{ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

Maka

$$x(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z^{-1}), \qquad \text{ROC: } \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

Bukti, dari definisi sebelumnya kita mempunyai

$$Z\{x(-n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l} = X(z^{-1})$$

Dengan mengubah l = -n. ROC $X(z^{-1})^l$ adalah

$$r_1 < |z^{-1}| < r_2 \quad \text{or equivalently} \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$$

ROC untuk x(n) adalah inversi x(-n).

Contoh:

Tentukan transformasi-z dari sinyal

X(n) = u(-n)

Jawab:

Diketahui sebelumya bahwa

$$u(-n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-z} \text{ ROC: } |z| < 1$$

Maka

$$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ ROC : } |z|>1$$

Bukti dengan mendefinisikan kedua sisi

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n}$$

$$= -z^{-1} Z\{nx(n)\}$$

Kedua transformasi mempunyai ROC yang sama

Contoh:

Tentukan transformasi-z sinyal berikut

$X(n) = n\, a^n u(n)$

Jawab:

Sinyal x(n) dapat dinyatakan sebagai $nx_1(n)$, dengan $x_1(n) = a^n u(n)$.

$$x_1(n) = a^n u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Jadi dengan menggunakan $u(n) \stackrel{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}$ dapat diperoeh

$$na^n u(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Jika diatur a = 1 , maka akan didapatkan transformasi-z sinyal ramp unit

$$nu(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \qquad \text{ROC: } |z| > 1$$

Contoh

Tentukan sinyal x(n) yang transformasi-z nya diberikan dengan

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \qquad |z| > |a|$$

Jawab:

Dengan mengambil turunan pertama X(z), kita peroleh

$$\frac{dX(z)}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1 + az^{-1}}$$

Jadi

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = az^{-1}\left[\frac{1}{1 - (-a)z^{-1}}\right], \qquad |z| > |a|$$

Inverse transformasi-z dari kondisi dalam kurung adalah $(-a)^n$. perkalian z^{-1} menyatakan tunda waktu dengan satu cuplikan (sifat pergeseran waktu), yang menghasilkan $(-a)^{n-1}u(n-1)$. Akhirnya dari sifat deferensiasi kita mempunyai

$$nx(n) = a(-a)^{n-1}u(n - 1)$$

Atau

$$x(n) = (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n}u(n - 1)$$

5. Konvolusi dua barisan

   Jika

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_1(z)$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z)$$

Maka

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

ROC x(z), sekurang-kurangnya adalah interseksi untuk $X_1(z)$ dan $X_2(z)$

Bukti. Konvolusi dari $x_1(n)$ dan $x_2(n)$ didefinisikan sebagai

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

Transformasi-z dari x(n) adalah

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right] z^{-n}$$

Dengan mengubah orde penjumlahan dan pemakaian sifat pergeseran waktu $x(n-k) \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-k}X(z)$, diperoleh

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n}\right]$$

$$= X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_2(z)X_1(z)$$

Contoh:

Hitung konvolusi x(n) dari sinyal-sinyal

$$x_1(n) = \{1, -2, 1\}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Jawab:

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5}$$

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Karena itu

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$$

Hasil yang juga dapat diperoleh dengan memperhatikan bahwa

$$X_1(z) = (1 - z^{-1})^2$$

$$X_2(z) = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}$$

$$X(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-6}) = 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$$

Sifat konvolusi adalah salah satu sifat transformasi-z yang sangat berguna karena sifat itu mengubah konvousi dua sinyal (domain waktu) menjadi perkalian transformasinya. Komputasi dari konvolusi dua sinyal, menggunakan transformasi-z memerlukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Hitunglah transformasi-z yang akan dicakup

$$X_1(z) = Z\{x_1(n)\}$$

$$\text{(time domain} \longrightarrow z\text{-domain)}$$

$$X_2(z) = Z\{x_2(n)\}$$

2. Kalikan kedua transformasi-z

$$X(z) = X_1(z)X_2(z), \qquad (z\text{-domain})$$

3. Carilah inverse transformasi-z dari X(z)

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}, \qquad (z\text{-domain} \longrightarrow \text{time domain})$$

6. Teorema nilai awal

Jika Z[x(n)] = X(z), maka x(0) = $\lim_{z\to\infty} X(z)$

Contoh :

Tentukan nilai awal x(0) jika $X(z) = \frac{z}{z - 0,9}$

Jawab:

x(0) = $\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z - 0,9}$ = 1

7. Teorema nilai akhir

Jika Z[x(n)] = X(z), maka $\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

Contoh :

Tentukan nilai akhir x(∞) jika $X(z) = \frac{z}{z - 0{,}9}$

Jawab:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{z-0{,}9} = 0$$

Tabel

Sifat-sifat transformasi-z

Sifat	Sinyal diskrit	Transformasi-z	ROC
Notasi	$x(n)$ $x_1(n)$ $x_2(n)$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$	ROC; $r_2 < \lvert z\rvert < r_1$ ROC_1 ROC_2
Linieritas	$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$; untuk seluruh a dan b	Paling sedikit interseksi antara ROC_1 dan ROC_2
Penggeseran waktu	$x(n - M)$	$z^{-M} X(z)$	X(z) kecuali z = 0 jika M>0, dan z = ∞, jika M<0
Pembalikan waktu	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$(1/r_1) < \lvert z\rvert < (1/r_2)$
Konvolusi	$x(n) * h(n)$	$X(z)\, H(z)$	Paling sedikit interseksi antara ROC_1 dan ROC_2
Perkalian dengan n	$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}[X(z)]$	$r_1 < \lvert z\rvert < r_2$
Perkalian dengan a^n	$a^n x(n)$	$X(z/a)$	$\lvert a\rvert r_2 < \lvert z\rvert < \lvert a\rvert r_1$
Teorema nilai awal	$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$	
Teorema nilai akhir	$\lim_{n\to\infty} x(n)$	$[(z-1)\, X(x)]_{z = -1}$	

Tabel

Pasangan transformasi-z dan ROC-nya

No	**Sinyal diskrit**	**Transformasi-z**	**ROC**
1	$\delta(n)$	1	Seluruh z
2	u(n)	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
3	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
4	$n\, a^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
5	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$
6	$-n\, a^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z \rvert < \lvert a \rvert$
7	$(\cos \Omega_0 n)\, u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0 + z^{-2}} = \frac{z^2 - z\cos\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$	$\lvert z \rvert > 1$
8	$(\sin \Omega_0 n)\, u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\Omega_0}{1-2z^{-1}\cos\Omega_0 + z^{-2}} = \frac{z\sin\Omega_0}{z^2 - 2z\cos\Omega_0 + 1}$	$\lvert z \rvert > 1$
9	$(a^n \cos \Omega_0 n)\, u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\Omega_0}{1-2az^{-1}\cos\Omega_0 + a^2z^{-2}} = \frac{z^2 - az\cos\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
10	$(a^n \sin \Omega_0 n)\, u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin\Omega_0}{1-2az^{-1}\cos\Omega_0 + a^2z^{-2}} = \frac{az\sin\Omega_0}{z^2 - 2az\cos\Omega_0 + a^2}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$

Dari tabel terlihat bahwa transformasi-z tidaklah unik untuk suatu sinyal, tetapi yang membedakan adalah ROC-nya. Misalnya untuk sinyal nomor 3 dan sinyal nomor 5, transformasi-z dari keduanya adalah sama, tetapi ROC-nya berbeda. Hal ini akan merepotkan untuk keperluan praktis, sehingga biasanya untuk keperluan ini dipakai transformasi-z satu sisi.